第３講　微分法・積分法

1　a，b，c を実数とし，関数 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y=g(x)$ を C_2 とする。C_2 は点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ を通り，C_2 の A における接線は C_1 の A における接線と一致するものとする。

(1)　曲線 C_1 の点 A における接線を ℓ とする。$f'(-1)=$ **ア** により，ℓ の方程式は

$y=$ **イ** $x+$ **ウ** である。また，原点 O と直線 ℓ の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　曲線 C_2 の点 A における接線は(1)の直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=$ **カ** である。したがって，b，c を a を用いて表すと，$b=$ **キ** a，$c=$ **ク** $-$ **ケ** となる。

（次ページに続く。）

(3) $a=-2$ のとき，関数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{スセソ}}{\boxed{タチ}}$ をとり，

$x=\boxed{ツ}$ で極小値 $\boxed{テトナ}$ をとる。

(4) $a<0$ とする。$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S=S_1+S_2$ とおくと，$S=\boxed{ニ}$ と表される。$\boxed{ニ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

① $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

② $\displaystyle\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

③ $\displaystyle\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

これを計算することにより，$S=\boxed{ヌネ}\,a$ となる。

2

〔1〕 a を実数とし，$f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき，$F(x)$ は $x=$ ア で極小になる。

(2) $a=$ イ のとき，$F(x)$ はつねに増加する。また，$F(0)=$ ウ であるから，$a=$ イ のとき，$F(2)$ の値は エ である。

エ の解答群

⓪ 0	① 正	② 負

（次ページに続く。）

(3) $a>$ [イ] とする。

b を実数とし，$G(x)=\int_b^x f(t)\,dt$ とおく。

関数 $y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを [オ] 方向に [カ] だけ平行移動したものと一致する。また，$G(x)$ は $x=$ [キ] で極大になり，$x=$ [ク] で極小になる。

$G(b)=$ [ケ] であるから，$b=$ [キ] のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は [コ] 個である。

[オ] の解答群

⓪　x 軸	①　y 軸

[カ] の解答群

⓪　b	①　$-b$	②　$F(b)$
③　$-F(b)$	④　$F(-b)$	⑤　$-F(-b)$

（次ページに続く。）

〔2〕 $g(x)=|x|(x+1)$ とおく。

点 P$(-1,\ 0)$ を通り，傾きが c の直線を ℓ とする。$g'(-1)=$ **サ** であるから，$0<c<$ サ のとき，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり，残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q，R とすると，点 Q の x 座標は **シス** であり，点 R の x 座標は **セ** である。

（次ページに続く。）

また，$0<c<$ [サ] のとき，線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし，線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S=\frac{\boxed{ソ}c^3+\boxed{タ}c^2-\boxed{チ}c+1}{\boxed{ツ}}$$

$$T=c^{\boxed{テ}}$$

である。

第３講　微分法・積分法

[1] (1)　$C_1 : f(x)=x^3-1$ より，$f'(x)=3x^2$

C_1 上の点 A$(-1,\ -2)$ における接線 ℓ の傾きは $f'(-1)=3$

よって，接線 ℓ の方程式は

$y=3(x+1)-2$　　つまり　$y=3x+1$

原点 O と直線 $\ell : 3x-y+1=0$ の距離は

$$\frac{|3\cdot0-1\cdot0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(2)　曲線 $C_2 : g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ の点 A$(-1,\ -2)$ における接線が直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=3$

$g'(x)=3x^2+2ax+b$ より，$g'(-1)=3-2a+b=3$　……①

また，C_2 は点 A を通るので，$g(-1)=-1+a-b+c=-2$　……②

①より，$b=2a$

これを②に代入して整理すると，$c=a-1$ となる。

(3)　$a=-2$ のとき，(2)より $b=-4$，$c=-3$

このとき

$g(x)=x^3-2x^2-4x-3$

$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

よって，$g(x)$ の増減表は右図。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$g\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-3=-\frac{41}{27}$$

$g(2)=2^3-2\cdot2^2-4\cdot2-3=-11$

よって，$g(x)$ は $x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $-\frac{41}{27}$ をとり，$x=2$ で極小値 -11 をとる。

(4)　(2)より，$g(x)=x^3+ax^2+2ax+a-1$

このとき

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)\\&=-ax^2-2ax-a\\&=-a(x^2+2x+1)\\&=-a(x+1)^2\geqq 0\quad(\because\ a<0)\end{aligned}$$

等号成立は $x=-1$ のとき

したがって，$f(x)\geqq g(x)$ であることから，$-2\leqq x\leqq -1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

と表され，$-1\leqq x\leqq 1$ において，曲線 C_1，C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

と表される。したがって，

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx\quad(\text{③})\\&=-a\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx\\&=-a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{1}=-a\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=-3a\end{aligned}$$

2〔１〕

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)=(x-1)(x-2)$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

この式の両辺を x で微分すると

$$F'(x)=f(x)$$

つまり，$F'(x)=(x-1)(x-2)$

よって，$F(x)$ の増減は右表。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	＋	0	－	0	＋
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$F(x)$ は $x=2$ で極小となる。

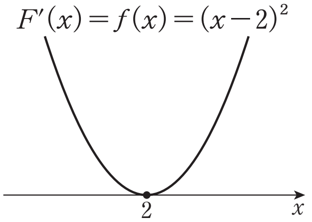
(2)　$F'(x)=f(x)=(x-a)(x-2)$

$F(x)$ がつねに増加するのは，$F'(x)$，つまり

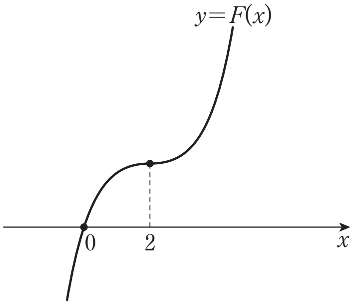
$f(x)=(x-a)(x-2)$ がつねに 0 以上，すなわち

$y=f(x)$ のグラフにおいて x 軸より下の部分が

存在しない場合であり，それは $a=2$ のときである。



また，$F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ であるから，$a=2$ のとき，$F(2)$ の値は正（①）である。



(3)　$a>2$ とする

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_b^x f(t)\,dt\\&=\int_b^0 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^b f(t)\,dt=F(x)-F(b)$$

よって，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸（①）方向に $-F(b)$（③）だけ平行移動したものと一致する。

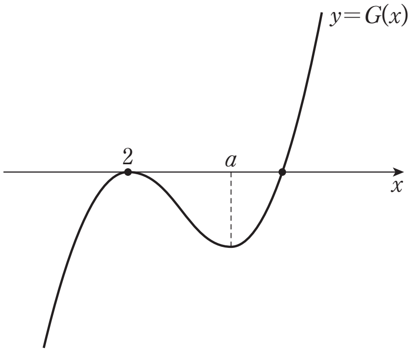
よって，$G'(x)=F'(x)=(x-a)(x-2)$

$a>2$ より，$G(x)$ の増減は右表。

したがって，$G(x)$ は $x=2$ で極大になり，$x=a$ で極小となる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

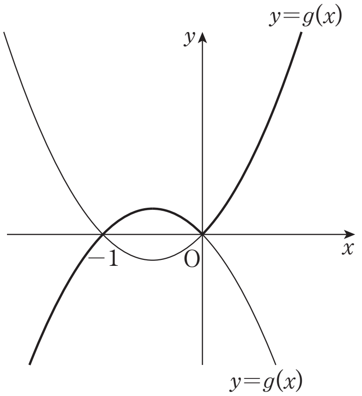
また，$G(b)=\int_b^b f(t)\,dt=0$ であるから，$b=2$ のとき $G(2)=0$ である。よって，$b=2$ のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は 2 個である。



〔２〕 $g(x)=|x|(x+1)$

$$=\begin{cases} x(x+1)=x^2+x & (x\geqq 0) \\ -x(x+1)=-x^2-x & (x<0) \end{cases}$$

よって，$y=g(x)$ のグラフは右図。



$x<0$ のとき　$g'(x)=-2x-1$ より，

$g'(-1)=-2\cdot(-1)-1=1$

よって，$y=g(x)$ 上の点 P$(-1,\ 0)$ における接線の傾きは 1

したがって，$0<c<1$ のとき，曲線 $y=g(x)$ と，点 P を通り傾きが c の直線 ℓ は 3 点で交わる。

直線 ℓ の方程式は $y=c(x+1)$ より $y=cx+c$

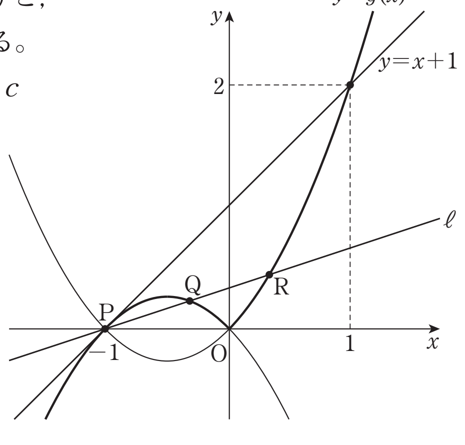
よって，曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標は，$x<0$ のとき

$\begin{cases} y=-x^2-x \\ y=cx+c \end{cases}$ より y を消去して整理すると

$x^2+(c+1)x+c=0$　　$(x+1)(x+c)=0$

$x<0$ より $x=-1,\ -c$

よって，点 Q の x 座標は $x=-c$



$x \geqq 0$ のとき

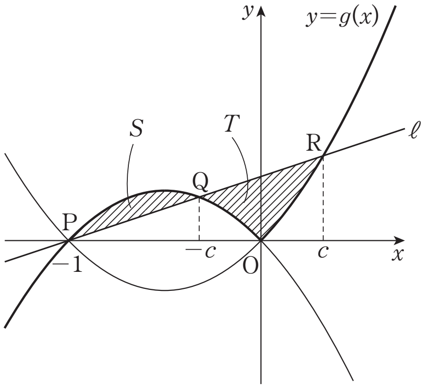
$\begin{cases} y=x^2+x \\ y=cx+c \end{cases}$ より y を消去して整理すると

$x^2+(-c+1)x-c=0$　　$(x+1)(x-c)=0$　　$x \geqq 0$ より $x=c$

よって，点 R の x 座標は $x=c$

$0<c<1$ のとき

線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は



$$S=\int_{-1}^{-c}\{(-x^2-x)-(cx+c)\}\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{-c}\{x^2+(c+1)x+c\}\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{-c}(x+1)(x+c)\,dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{6}\{-c-(-1)\}^3\right]$$
$$=\frac{1}{6}(-c+1)^3=\frac{-c^3+3c^2-3c+1}{6}$$

線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 T は

$$T=\int_{-c}^{0}\{(cx+c)-(-x^2-x)\}\,dx+\int_{0}^{c}\{(cx+c)-(x^2+x)\}\,dx$$
$$=\int_{-c}^{c}(cx+c)\,dx-\int_{-c}^{0}(-x^2-x)\,dx-\int_{0}^{c}(x^2+x)\,dx$$
$$=\{(-c^2+c)+(c^2+c)\}\cdot 2c\cdot\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-c}-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{c}$$
$$=2c^2-\left(-\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{2}c^2\right)-\left(\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{2}c^2\right)=c^2$$